
512.22
F31c
F

DIE

CONFIGURATION $(12_6, 16_3)$

UND DIE ZUGEHÖRIGE GRUPPE VON

2304 COLLINEATIONEN UND CORRELATIONEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT

DER

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

JULIUS FEDER

AUS EUPEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1896.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN GYMNASIALLEHRER

SERVATIUS LEISEN

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

A. Erzeugung und allgemeine Eigenschaften der Configurationen $(12_6, 16_3)$ und $(24_9, 18_4)$.

(1.) Bekanntlich liegen die 12 Aehnlichkeitspunkte von 4 Kugeln zu je dreien auf 16 Geraden und zu je sechsen in 12 Ebenen, den 8 Aehnlichkeitsebenen und 4 Centralebenen der Kugeln; diese 12 Ebenen aber gehen zu je dreien durch die 16 Geraden und zu je sechsen durch die 12 Aehnlichkeitspunkte*). Die genannten 12 Punkte, 12 Ebenen und 16 Geraden bilden somit nach der Reye'schen Bezeichnung eine Configuration $(12_6, 16_3)$.

Jede Ebene, welche irgend einen Punkt dieser Configuration mit einer Cf.-geraden verbindet, ist eine Ebene der Configuration, und ebenso ist der Schnittpunkt irgend einer Cf.-geraden mit einer beliebigen Cf.-ebene ein Punkt der Configuration. Jede Cf.-ebene enthält 4 Cf.-geraden, welche sich in den 6 Cf.-punkten der Ebene schneiden. Sie wird in ihren 4 Cf.-geraden von je zwei, insgesammt also von 8 Cf.-ebenen geschnitten; die drei übrigen Cf.-ebenen schneidet sie in den Diagonalen des von ihren 4 Cf.-geraden gebildeten Vierseits und bildet mit ihnen ein Tetraeder Δ, dessen Kanten je 2 Cf.-punkte, und dessen Flächen je 4 und zusammen alle 16 Cf.-geraden enthalten. Da in einem Vierseit die 3 Diagonalen sich gegenseitig harmonisch theilen, so sind die 2 mit irgend einer Kante des Tetraeders Δ incidenten Cf.-punkte durch die auf dieser Kante gelegenen Eckpunkte von Δ harmonisch getrennt. Also:

> „Die 12 Cf.-ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ lassen sich in 3 Quadrupel theilen, von welchen jedes die Ebenen eines Tetraeders Δ bildet; die Cf.-punkte liegen zu je zweien auf den Kanten jedes der 3 Tetraeder Δ und trennen deren

---

*) Vgl. Poncelet. Traité des propriétés proj. des figures, 1822, p. 409.

Eckpunkte harmonisch von einander. — Je zwei der Tetraeder Δ liegen auf vierfache Weise bez. der Ebenen des dritten perspectiv, und die 3Δ bilden ein sog. ‚desmisches‘ System.“*)

Die 18 Kanten der Tetraeder Δ wollen wir mit Herrn Reye**) die „Diagonalen“ der Cf. $(12_6, 16_3)$ nennen.

Analog zu den vorstehenden Sätzen ergiebt sich:

„Die Cf.-punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ lassen sich in 3 Quadrupel theilen, von welchen jedes die Eckpunkte eines Tetraeders Δ_1 bildet; die Cf.-ebenen gehen zu je zweien durch die Kanten jedes der 3 Tetraeder Δ_1 und trennen deren Ebenen harmonisch. Je zwei der Tetraeder Δ_1 liegen auf vierfache Weise bez. der Eckpunkte des dritten perspectiv, und die 3 Δ_1 bilden gleichfalls ein ‚desmisches‘ System.“

Die Tetraeder Δ_1 haben auch die 18 Diagonalen der Cf. zu Kanten. Jede dieser Diagonalen ist incident mit zwei Eckpunkten und zwei Ebenen eines Δ sowohl wie eines Δ_1; die 24 Ebenen, 24 Eckpunkte und 18 Kanten der 6 Tetraeder Δ und Δ_1 sind Elemente einer Cf. $(24_9, 18_4)$, der „harmonischen“ Configuration. Die 18 Geraden dieser Cf. sind mit je 4 harmonischen Cf.-punkten und Cf.-ebenen incident.

Für das folgende (2) ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass zwei Gegenkanten eines Tetraeders Δ auch Gegenkanten eines Δ_1 sind, oder mit anderen Worten, dass die 4 auf zwei Gegenkanten eines Δ liegenden Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ die Eckpunkte eines Δ_1 bilden. Wäre nämlich die Verbindungsgerade von zwei auf irgend welchen Gegenkanten eines Δ liegenden Punkten der Cf. $(12_6, 16_3)$ eine Cf.-gerade, so wäre die Verbindungsebene derselben mit einer der betr. Gegenkanten, d. h. mit dem zweiten auf dieser gelegenen Cf.-punkte, nach obigem eine Cf.-ebene; durch diese Kante ginge demnach ausser den zwei Cf.-ebenen, welche zum Tetraeder Δ gehören, noch eine dritte Ebene der Cf. $(12_6, 16_3)$, was aber nach einem früheren Satze nicht der Fall ist. Wir wollen solche Diagonalen der Cf. $(12_6, 16_3)$, welche Gegenkanten in je einem Tetraeder Δ und Δ_1 sind, „Gegendiagonalen“ nennen.

(2.) Verstehen wir überhaupt unter dem „Gegenelement“ eines Cf.-elementes das diesem in einem Δ oder Δ_1 gegenüberliegende Element, so schneiden sich die Gegendiagonalen der 3 in einer Ebene ε eines Tetraeders Δ oder Δ_1 gelegenen Diagonalen der Cf. im Gegen-

*) Vgl. Reye, Acta Math. I, p. 99. — Cyparissos Stephanos, Bulletin des sciences math. et astr., 2e série t. III, p. 424. 1879.

**) a. a. O. p. 98.

punkte von ε. Da nun die 6 in irgend einer Cf.-ebene ε der Cf. (12_6, 16_3) gelegenen Cf.-punkte P paarweise auf den 3 mit ε incidenten Diagonalen liegen, so gehen die Gegenebenen der 6 Punkte P paarweise durch die Gegendiagonalen der 3 Diagonalen, sie gehen sonach sämmtlich durch den Gegenpunkt von ε.

Diese Bemerkung setzt uns in die Lage, die Existenz einer polaren Correlation nachzuweisen, welche die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 zu Poltetraedern hat. Eine polare Correlation σ, welche ein Tetraeder Δ zum Poltetraeder besitzt, ist festgelegt, wenn wir irgend einem Eckpunkte eines zweiten Δ seine Gegenebene ε als entsprechende Ebene zuweisen. Die Schnittpunkte der Ebene ε mit den Kanten des Poltetraeders Δ sind die 6 Cf.-punkte von ε; diesen 6 Punkten entsprechen in σ 6 Ebenen, welche durch die resp. gegenüberliegenden Kanten des Poltetraeders Δ und durch den Gegenpunkt von ε gehen; den 6 Cf.-punkten von ε entsprechen somit in der Correlation σ ihre Gegenebenen. Dass auch die übrigen 6 Cf.-punkte durch σ in ihre Gegenebenen übergeführt werden, folgt leicht aus den in (1) angeführten Sätzen. Die Correlation σ besitzt also wirklich die 3 Tetraeder Δ_1 zu Poltetraedern, ebenso aber die 3 Δ, weil deren Gegenkanten aus reciproken Polaren bestehen. Da die 12 Ebenen der 3 Δ und die 12 Eckpunkte der 3 Δ_1 einer Cf. (12_6, 16_3) angehören, so gehören die 12 Eckpunkte der Δ und die 12 Ebenen der Δ_1 gleichfalls einer Cf. (12_6, 16_3) an. Die beiden Cff. (12_6, 16_3) gehen durch die polare Correlation σ in einander über und bilden zusammen die schon oben erwähnte harmonische Cf. (24_9, 18_4). Diese beiden Cff. (12_6, 16_3), welche ihre Diagonalen gemeinsam haben, wollen wir „associirte" Configurationen nennen.

(3.) Aus dem vorhergehenden ergeben sich ohne weiteres die folgenden zwei Erzeugungsarten von Cff. (12_6, 16_3):*)

a. Man durchschneidet die 6 Kanten eines Tetraeders Δ durch eine Ebene ε; die 6 Schnittpunkte bilden mit denjenigen 6 Kantenpunkten, die von ihnen durch je 2 Eckpunkte des Tetraeders harmonisch getrennt sind, die Punkte der Cf. Zu den 12 Ebenen der Cf. gehören ausser den 4 Tetraederebenen und der Ebene ε die sieben Ebenen, welche von ε durch je zwei Gegenelemente des Tetraeders harmonisch getrennt sind.

b. Analog bilden die 6 Ebenen, durch welche die 6 Kanten eines Tetraeders Δ_1 aus einem Punkte P projicirt werden, mit denjenigen 6 Ebenen, die von ihnen durch je zwei Tetraederflächen harmonisch getrennt sind, die 12 Ebenen einer Cf. (12_6, 16_3); ihre 12 Cf.-Punkte bestehen aus den 4 Eckpunkten von Δ_1, dem Punkte P und den

*) Reye, a. a. O. p. 97, 98.

sieben Punkten, welche von P durch je zwei Gegenelemente des Tetraeders harmonisch getrennt sind.

Jede auf eine der vorstehenden Arten erzeugte Cf. $(12_6, 16_3)$ kann durch Collineationen und ebenso durch Correlationen in sich selbst transformirt werden.*) Die Collineationen führen die zu der Cf. $(12_6, 16_3)$ gehörigen 3 Tetraeder Δ in einander über. Man kann nun zur Festlegung einer solchen Collineation den Ebenen eines Δ die Ebenen irgend eines Δ (und zwar auf 24 verschiedene Weisen) und ferner einer fünften Cf.-ebene eine beliebige fünfte als entsprechende Elemente zuweisen und erhält demnach $576 = 3 \,.\, 24 \,.\, 8$ Collineationen, welche unsere Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen. Entsprechend giebt es 576 Correlationen, welche die Cf. in sich transformiren; diese führen die $3\,\Delta$ in die $3\,\Delta_1$ über und umgekehrt die Δ_1 in die Δ.

(4.) Es lässt sich nachweisen**), dass auf die oben angegebenen Arten (3a, b) jede Cf. $(12_6, 16_3)$ erzeugt werden kann. Dieser Nachweis zeigt erstens, dass bei jeder Cf. $(12_6, 16_3)$ die Verhältnisse so liegen, wie sie bis jetzt angegeben wurden, insbesondere dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ in je 576 collinearen und 576 correlaren Räumen sich selbst zugeordnet ist. Dann aber folgt aus jenem Nachweise sofort, dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ durch 576 Collineationen und 576 Correlationen in jede andere übergeführt werden kann. Wir sind somit berechtigt, die projectiven Eigenschaften einer „metrischen“ Cf. $(12_6, 16_3)$, in welcher die Tetraeder Δ_1 eine ausgezeichnete Gestalt besitzen, auf jede Cf. $(12_6, 16_3)$ auszudehnen.

Von diesen metrischen Configurationen sind zwei besonders einfach, nämlich die Configurationen der regulären Hexaeder und Octaeder***). Die Würfelconfiguration enthält ausser den 8 Eckpunkten eines Würfels, seinen 12 Kanten und 6 Flächen noch den Mittelpunkt, die durch ihn gehenden 4 Diagonalen und 6 Diagonalebenen und die 3 unendlich fernen Kantenpunkte. Die reguläre Octaedercf. besteht aus den 8 Flächen, 12 Kanten, 6 Eckpunkten, den 3 Diagonalebenen, den unendlich fernen 6 Punkten und 4 Geraden der Kanten und Flächen eines regulären Octaeders, ausserdem gehört der Cf. noch die unendlich ferne Ebene an. Uebrigens nennt Herr Reye jede Cf. $(12_6, 16_3)$ eine Hexaeder- oder Octaedercf. Je eine Würfel- und eine reguläre Octaederconfiguration sind einander associirt.

(5.) Folgende Bezeichnung der Cf.-elemente rührt von Herrn Reye her:

Sei i, k, l, m irgend eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4. Wir

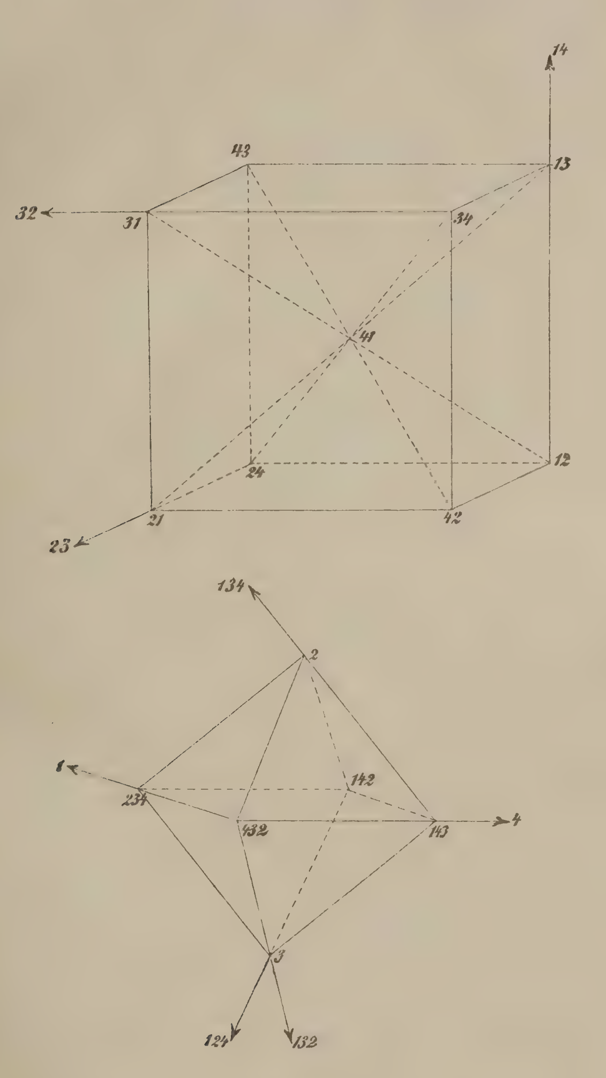
*) Reye, a. a. O. p. 100.

**) Ebenda p. 98.

***) Ebenda p. 100.

bezeichnen dann die Punkte der Cf., die Eckpunkte der Tetraeder Δ_1, durch die Ziffernpaare ik (s. Fig.); unterscheiden wir die Δ_1, ebenso wie die Δ durch oben angefügte Indices 1, 2, 3, so nennen wir die Eckpunkte von:

	Δ_1^1	Δ_1^2	Δ_1^3
bez.	12 21 34 43	13 31 24 42	14 41 23 32.



Von den 12 Cf.-ebenen bezeichnen wir vier, die einem Δ angehören, durch die Ziffern $i = 1, 2, 3, 4$; die übrigen acht durch die Ternen ikl oder deren cyklische Permutationen. Es mögen die Ebenen der Tetraeder

Δ^1 Δ^2 Δ^3

bez. durch

1 2 3 4 234 143 124 132 432 134 142 123

bezeichnet werden.

Die Bezeichnung der Punkte und Ebenen der Cf. lässt sich so einrichten, dass die 6 Punkte ik, il, im, ki, li, mi in der Ebene $\boldsymbol{i}$, die Punkte ik, il, im, lm, mk, kl in der Ebene $klm = lmk = mkl$ liegen, und dass ferner die Punkte ik, il, im, ebenso aber die Punkte ik, li, mi mit einer Cf.-geraden incident sind. Dass diese Bezeichnungsweise, welche wir acceptiren, möglich ist, kann man aus den Figuren ersehen*), und ergiebt sich auch aus der Erzeugungsart (3 a), wenn wir die Ebenen des dort genannten Δ durch $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ und die Schnittpunkte seiner Kanten mit der Ebene ε bez. durch ik, il, im, kl, lm, mk bezeichnen u. s. w. Die Ebene ε ist dann mit klm zu bezeichnen.

(6.) Die 8 Eckpunkte von je 2 Tetraedern Δ_1 sind associirte Punkte, z. B. die 8 Eckpunkte der Tetraeder Δ_1^1 und Δ_1^2,

12 21 34 43, 13 31 24 42.

Durch sie hindurch gehen nämlich die 3 Flächen II. O.:

1) das Paar der Ebenen 234 und 143,
2) das Paar der Ebenen 142 und 432,
3) das Paar der Ebenen **2** und **3**.

Ueberhaupt gehen durch die genannten 8 Punkte diejenigen 6 Ebenenpaare, welche aus den mit irgend einer Kante des dritten Tetraeders Δ_1^3 incidenten Cf.-ebenen gebildet werden. Wir erhalten demnach 3 Gruppen von associirten Punkten, von welchen jede die 8 Eckpunkte zweier Δ_1 umfasst. Die 8 Punkte jeder dieser Gruppen sind die Basispunkte eines Bündels von Flächen II. O., und es ist leicht zu beweisen, dass jede beliebige Fläche eines der so erhaltenen 3 Bündel das Tetraeder Δ_1, dessen Eckpunkte nicht zu den Basispunkten des Bündels gehören, als Poltetraeder besitzt. Von diesen 3 Flächenbündeln behaupten wir:

„Die Punkte einer beliebigen Fläche irgend eines der Bündel sind paarweise conjugirt bez. des zweiten und ebenso des dritten Bündels.“

Zunächst beweisen wir, dass jeder Kegel II. O., welcher eine Ecke irgend eines Δ_1, etwa den Punkt 12 von Δ_1^1, zum Mittelpunkt hat und die 4 durch ihn gehenden Cf.-geraden enthält, sich selbst con-

---

*) Die Figuren sind der öfters erwähnten Arbeit des Herrn Reye entnommen; in der zweiten Figur sind die Eckpunkte der Δ durch die Ziffern bezeichnet, welche eigentlich den ihnen gegenüberliegenden Tetraederebenen zukommen.

jugirt ist in Bezug auf die beiden Flächenbündel, welche ausser den Eckpunkten desselben Tetraeders Δ_1^1 noch die Eckpunkte je eines zweiten Δ_1 zu Basispunkten besitzen. Einer der letzteren Bündel hat die Basispunkte

$$12\ 21\ 34\ 43,\quad 13\ 31\ 24\ 42.$$

In Bezug auf ihn sind den Punkten einer Geraden g des genannten Kegels 12 die Punkte einer cubischen Raumcurve c^3 conjugirt, welche die Polaren von g bez. der Flächen des Bündels zu Sehnen hat.*) Da die Gerade g auf einer Fläche dieses Bündels liegt, und folglich mit einer ihrer Polaren zusammenfällt, so ist g selbst Sehne von c^3. Diese cubische Raumcurve geht durch den sich selbst conjugirten Punkt 12 und durch die 4 Punkte 14, 41, 23, 32; denn letztere bestimmen ja ein Poltetraeder der Flächen des Bündels, und jeder von ihnen ist dem Schnittpunkt von g mit der gegenüberliegenden Tetraederebene conjugirt. Die Raumcurve c^3 wird daher aus 12 durch einen Kegel II. O. projicirt, welcher ausser g die 4 Cf.-geraden von 12 enthält; dieser Kegel ist demnach mit dem obigen Kegel 12 identisch, d. h. die cubische Raumcurve c^3 liegt auf dem Kegel 12, und dieser ist sich selbst conjugirt bez. des erwähnten Bündels. Ebenso beweist man, dass die Kegel mit den Mittelpunkten 21, 34, 43, welche die durch diese Punkte gehenden Cf.-geraden enthalten, sich selbst conjugirt sind in Bezug auf jeden der Bündel, welche ausser 12, 21, 34, 43 noch die Eckpunkte von Δ_1^2 resp. Δ_1^3 zu Knotenpunkten besitzen. Dasselbe gilt dann aber auch für die biquadratischen Schnittcurven jener Kegel, d. h. für sämmtliche durch die 8 Eckpunkte von Δ_1^2 und Δ_1^3 gehenden biquadratischen Raumcurven, folglich auch für die Flächen des Bündels, welcher diese 8 Eckpunkte als Knotenpunkte besitzt. Diese Sätze sind der Erweiterung fähig. So folgt z. B. ohne weiteres:

> „Zwei projective Büschel von Flächen II. O., welche zweien der obigen Bündel angehören, erzeugen eine Fläche IV. O., deren Punkte paarweise conjugirt sind bez. des dritten Bündels.“

(7.) Da zwei associirte Cff. (12_6, 16_3), welche zusammen eine harmonische Cf. (24_9, 18_4) bilden, durch 576 Collineationen und 576 Correlationen in sich selbst, durch ebensoviele projective Verwandtschaften aber in einander übergehen, so wird die harmonische Cf. durch 1152 Collineationen und 1152 Correlationen in sich selbst übergeführt. Diese 2304 Collineationen und Correlationen sind die einzigen, welche die harmonische Cf. ungeändert lassen. Das leuchtet sofort ein, sobald wir beweisen, dass die harmonische Cf. nur durch solche

*) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. III, p. 136.

Collineationen oder Correlationen in sich selbst übergeht, welche die beiden sie zusammensetzenden associirten Cff. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst oder in einander transformiren. Nehmen wir nun an, es ginge durch irgend eine Collineation, welche die harmonische Cf. in sich überführt, irgend eine Ebene der einen Cf. $(12_6, 16_3)$ in eine Ebene derselben Cf. über. In jeder dieser beiden Ebenen liegen 3 Diagonalen der Cf. $(12_6, 16_3)$, und von den zweiten durch diese Diagonalen gehenden Ebenen dieser Cf. geht auch das eine Tripel in das andere über; es ergiebt sich dies daraus, dass die durch eine Diagonale gehenden Cf.-ebenenpaare zweier associirter Cff. $(12_6, 16_3)$ einander harmonisch trennen und dahe rauch in ebensolche Ebenenpaare transformirt werden. Und so finden wir, dass ein Δ der einen Cf. $(12_6, 16_3)$ in ein Δ derselben Cf. übergeführt wird. Die 12 Ebenen der associirten Cf. aber werden durch die vorausgesetzte Collineation in einander transformirt, weil sie paarweise durch die Kanten der beiden eben erwähnten Δ gehen und durch deren Flächen paarweise harmonisch getrennt werden. Also geht durch unsere Collineation die zweite Cf. und damit auch die associirte in sich selbst über. Also:

> „Jede Collineation, die eine harmonische Cf. in sich selbst transformirt, führt die beiden die harmonische Cf. bildenden associirten Cff. $(12_6, 16_3)$ entweder in sich selbst oder in einander über.“

Die harmonische Cf. ist daher nur auf 1152 Arten zu sich selbst collinear.

Für die Correlationen kann man auf ähnliche Weise das analoge Resultat ableiten; man kann aber auch den Satz benutzen:

> „Giebt es n und nur n Collineationen, und eine Correlation, welche ein Gebilde in sich transformiren, so giebt es auch n und nur n Correlationen, welche das betr. Gebilde in sich überführen.“

Diese n Correlationen resultiren aus jener einen und den n Collineationen.

B. Eintheilung und Beschreibung der 576 Collineationen, welche eine Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst transformiren.

(8.) Die 576 Collineationen, welche eine Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen, bilden eine Gruppe; denn das Product irgend welcher von ihnen ist offenbar eine Collineation mit derselben Eigenschaft und gehört somit zu jenen 576 Collineationen. Es liegt nun im Wesen einer solchen Gruppe, dass sie sich durch eine Anzahl ihrer Individuen, welche kleiner ist als ihr Grad, erzeugen lässt. Ehe wir jedoch hierauf eingehen, ist es unbedingt nothwendig, eine Beschreibung und Eintheilung der 576 Collineationen zu geben. Von den Gesichtspunkten,

von denen aus man eine solche Eintheilung treffen kann, wählen wir wohl einen der natürlichsten, wenn wir die 576 Collineationen nach der Ueberführung der Δ in einander eintheilen. Diese Eintheilung bietet sich von selbst dar, da man ja bei der Herstellung einer collinearen Verwandtschaft einem Tetraeder und einer zu ihm in allgemeiner Lage befindlichen Ebene ein anderes Tetraeder und eine entsprechende Ebene zuweist. Bei der Darstellung der Collineationen bedienen wir uns der Cykeln homologer Punkte und Ebenen; zugleich stellen wir den Uebergang der Δ und ebenso der Δ_1 in einander cyklisch dar. Die 576 Collineationen lassen sich in beigegebener Tabelle (Seite 10 und 11) unterbringen, in welcher p, q, r die Ziffern 1, 2, 3 in irgend einer Permutation bedeuten.

Es liegt nicht in unserer Absicht, genau anzugeben, wie wir diese Tabelle aufgestellt haben, wir wollen sie nur rechtfertigen, und das nur insoweit, als wir sie später benutzen werden. Wir wollen Aufschluss darüber geben, warum wir uns erlaubt haben, gewisse Collineationen in eine Abtheilung zu bringen, und für sie alle nur ein Beispiel als Typus derselben anzugeben.

Nehmen wir z. B. die Abtheilung (IIγ); das Beispiel derselben geht, wenn man die Zahlen **1**, **2**, **3**, **4** durch die Buchstaben $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ ersetzt, über in:

$$\alpha = \boldsymbol{i}.\ \boldsymbol{klm}.\ klm\ mlk.\ iml\ ikl\ ilk\ imk\ ikm\ ilm$$
$$= ik\ il\ im.\ ki\ li\ mi.\ lm\ km\ kl\ ml\ mk\ lk.$$

Jede der Collineationen von (IIγ) erhält man nun wie folgt:

Irgend eine Cf.-ebene, die wir $\boldsymbol{i}$ nennen, geht durch die Collineation in sich selbst über; die 3 Cf.-ebenen, welche mit $\boldsymbol{i}$ zusammen ein Δ bilden, gehen ternär cyklisch in einander über; diese Ebenen sollen mit $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ bezeichnet werden, und der betr. Cykel sei ($\boldsymbol{klm}$). Schliesslich führt die Collineation noch 2 Cf.-ebenen, klm und mlk, welche sich mit i in einer Cf.-geraden schneiden, in einander über. Durch die vorstehende Beschreibung ist eine Collineation festgelegt und durch Abzählung ergiebt sich, dass wir durch verschiedene Annahme der in der Beschreibung vorkommenden Ebenen im ganzen

$$12 \cdot 2 \cdot 4 = 96$$

Collineationen erhalten, welche die Darstellung haben

$$\alpha = \boldsymbol{i}.\ \boldsymbol{k\,l\,m}.\ klm\ mlk.$$

Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte der Ebene klm mit den Kanten $\overline{\boldsymbol{ik}}$, $\overline{\boldsymbol{il}}$, $\overline{\boldsymbol{im}}$, $\overline{\boldsymbol{mk}}$, $\overline{\boldsymbol{kl}}$, $\overline{\boldsymbol{lm}}$ jenes Tetraeders Δ bez. durch ik, il, im, mk, kl, lm und die zweiten auf diesen Kanten liegenden Cf.-punkte bez. durch ki, li, mi, km, lk, ml (vergleiche (5)), so gehen die 3 Ebenen $\boldsymbol{i}$, klm, mlk durch die Cf.-gerade $\overline{ik\ il\ im}$; die letztere Ebene geht

Eintheilung der 576 Collineationen, welche

			Unter den 576 Collineationen giebt es:	darunter:		nämlich:
I.			96 Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 .$			
	α			$16\, \Delta_1^1 . \Delta_1^2 . \Delta_1^3 .$		
		1.			1.	die Identität
		2.			2.	9 hyperbolisch involutorische
		3.			3.	6 elliptisch involutorische
	β			$48\, \Delta_1^p . \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		
		1.			1.	12 centrisch involutorische
		2.			2.	36 windschief hyperbolisch quaternäre
	γ			$32\, \Delta_1^p\, \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		32 planar ternäre
II.			288 Collineationen $\Delta^p . \Delta^q\, \Delta^r .$			
	α			$48\, \Delta_1^1 . \Delta_1^2 . \Delta_1^3 .$		
		1.			1.	12 centrisch involutorische
		2.			2.	36 windschief hyperbolisch quaternäre
	β			$96\, \Delta_1^p . \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		
		1.			1.	36 hyperbolisch involutorische
		2.			2.	36 planar quaternäre
		3.			3.	72 windschief elliptisch quaternäre
	γ			$96\, \Delta_1^p\, \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		96 halbplanar senäre
III.			192 Collineationen $\Delta^p\, \Delta^q\, \Delta^r .$			
	α			$32\, \Delta_1^1 . \Delta_1^2 . \Delta_1^3 .$		32 planar ternäre
	β			$96\, \Delta_1^p . \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		96 halbplanar senäre
	γ			$64\, \Delta_1^p\, \Delta_1^q\, \Delta_1^r .$		
		1.			1.	16 geschaart ternäre
		2.			2.	48 halbgeschaart senäre

eine Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen.

zum Beispiel

1.2.3.4. 234. 143. 124. 132. 432. 134. 142. 123.	12. 21. 34. 43. 13. 31. 24. 42. 14. 41. 23. 32.
1 2. 3 4. 234. 143. 124. 132. 432 123. 134 142.	12. 21. 34. 43. 13 42. 31 24. 14 23. 41 32.
1 2. 3 4. 234 143. 124 132. 432 134. 142 123.	12 21. 34 43. 13 24. 31 42. 14 23. 41 32.
1.2.3 4. 234. 143 132. 124. 432. 134 142. 123.	12. 21. 34. 43. 13 14. 31 41. 24 32. 42 23.
1 2 3 4. 234. 143 124. 132. 432 123 134 142.	12 23 34 14. 21 32 43 41. 13 42. 31 24.
1.2 3 4. 234. 143 124 132. 432. 134 142 123.	12 13 14. 21 31 41. 34 42 23. 43 24 32.

1.2.3.4. 234 142. 143 432. 124 134. 132 123.	12 21. 34. 43. 13 31. 24. 42. 14. 41. 23 32.
1 2.3 4. 234 432 124 123. 143 142 132 134.	12. 21. 34 43. 13 24 31 42. 14 32 41 23.
1.2.3 4. 234 432. 143 134. 124 123. 132 142.	12. 21. 34 43. 13 14. 31 41. 24 23. 42 32.
1 2.3.4. 234 432 124 123. 143 134 132 142.	12. 21. 34 43. 13 32 31 23. 14 24 41 42.
1 2 3 4. 234 432 124 142. 143 123 132 134.	12 32 34 14. 21 23 43 41. 13 24 31 42.
1.2 3 4. 234 432. 143 123 132 142 124 134.	12 13 14. 21 31 41. 34 24 23 43 42 32.

1. 234 432. **2** 124 123. **3** 132 134. **4** 143 142.	12. 21 34 43. 13. 31 42 24. 14. 41 23 32.
1 234 432. **2** 143 123 **4** 124 142. **3** 132 134.	12 14. 21 23 43 41 34 32. 13. 31 42 24.
1 234 432. **2** 143 134. **3** 124 142. **4** 132 123.	12 14 13. 21 23 24. 34 32 31. 43 41 42.
1 143 123 **2** 124 134. **3** 234 432 **4** 132 142.	12 24 41 21 31 23. 34 13 14 43 42 32.

ausserdem durch die Cf.-punkte ml, lk, km. Es ist offenbar möglich, die noch unbenannten Cf.-ebenen entsprechend der in (5) angenommenen Bezeichnungsweise zu bezeichnen. Dann haben die erwähnten 96 Collineationen die gemeinsame Bezeichnung:

$$\alpha = \boldsymbol{i.\,k\,l\,m.}\ klm\ mlk.\ iml\ ikl\ ilk\ imk\ ikm\ ilm.$$
$$= ik\ il\ im.\ ki\ li\ mi.\ lm\ km\ kl\ ml\ mk\ lk.$$

Allgemein ergiebt sich als erste Anmerkung zur Tabelle:

„Die in irgend einer Abtheilung der Tabelle enthaltenen Collineationen lassen sich durch eine und dieselbe Bezeichnung darstellen, welche mit der Bezeichnungsweise in (5) übereinstimmt.“

Damit ist keineswegs gesagt, dass die Collineationen einer Abtheilung aus einer von ihnen durch blosse Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 oder der Buchstaben i, k, l, m abgeleitet werden können; das würde auch, wie das Beispiel ($\mathrm{I}\alpha_2$) schon lehrt, nicht richtig sein. Wegen der in obiger Anmerkung angegebenen Eigenschaft sagen wir, die Collineationen einer jeden Abtheilung sind von demselben „Typus“ und unterscheiden demnach unter den 576 Collineationen sechzehn Typen.

„Wird die Bezeichnung der Cf. (12_6, 16_3) unter Beachtung der in (5.) angegebenen Vorschrift geändert, so stellt die alte Bezeichnung irgend einer jener 576 Collineationen nach der Aenderung eine Collineation desselben Typus dar.“

Nämlich jede mit den Angaben von (5.) übereinstimmende Bezeichnung ist vollständig bestimmt, wenn wir die Ebenen eines Δ mit $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ und eine beliebige fünfte Cf.-ebene mit klm bezeichnen. In irgend einem Beispiele der Tabelle schreiben wir statt 1, 2, 3, 4 bez. i, k, l, m und weisen zur Herstellung einer Collineation den 5 Ebenen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, klm$ diejenigen Ebenen zu, welche in dem Beispiele auf sie folgen. Die erhaltene Collineation gehört sicher zu den 576 Collineationen; ergänzen wir ihre Bezeichnung, so stimmt diese genau mit der des Beispiels überein. Wollten wir das vollständig durchführen, so müssten wir uns genau derselben Arbeit noch einmal unterwerfen, die wir bei der Herstellung der Tabelle durchgeführt haben.

(9.) In der Tabelle haben wir die Darstellung der Collineationen nur in Ebenen der Δ und in Punkten der Δ_1, also in Elementen der Cf. (12_6, 16_3) gegeben. Bedenkt man aber, dass die Eckpunkte der Δ und die Ebenen der Δ_1 sich genau ebenso transformiren wie die ihnen gegenüberliegenden Elemente der Tetraeder und bezeichnet man ein- für allemal das Gegenelement einer Ebene oder eines Eckpunktes a eines der Tetraeder durch $\bar{a}$, so erhält man offenbar die Darstellung einer Collineation in Eckpunkten der Δ und in Ebenen der Δ_1, d. h.

in Elementen der associirten Cf. (12_6, 16_3), indem man jedes Element der Darstellung der betr. Collineation in Ebenen der Δ und in Punkten der Δ_1 oben mit einem Querstriche versieht. Man erkennt hieraus leicht, dass zu jeder Anzahl von Collineationen, die für eine Cf. (12_6, 16_3) von demselben Typus sind, eine gleiche Anzahl von Collineationen gehört, welche in den Elementen der associirten Cf. von demselben Typus sind.

Solche zusammengehörige Collineationen sind z. B. die 12 unter (Iβ_1) und die 12 unter (IIα_1) angegebenen Involutionen, ferner die 36 quaternären Collineationen von (Iβ_2) und die 36 von (IIα_2), die 32 ternären unter (Iγ) und die 32 ternären unter (IIIα), endlich die 96 senären Collineationen unter (IIγ) und die 96 senären unter (IIIβ). Die übrigen der 576 Collineationen sind in sich selbst reciprok, d. h. von demselben Typus in den Elementen der beiden Cff. Mit der Beschreibung der Collineationen irgend eines Typus sind auch die zugehörigen Collineationen hinreichend erklärt.

Die 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen unter (Iα_2) haben je zwei Gegenkanten der 3 Δ (und Δ_1) zu Involutionsaxen. In jeder der 6 elliptisch geschaarten Involutionen entsprechen 2 Gegenkanten jedes der 3 Δ sich selbst, die anderen Gegenkanten entsprechen einander. Die sich selbst entsprechenden Diagonalen der Cf. sind natürlich windschief und die auf jeder derselben liegenden Cf.-punkte sind einander zugewiesen. Von den 12 centrischen Involutionen unter (Iβ_1) hat jede einen Eckpunkt der 3 Δ_1 zum Involutionscentrum und die ihm gegenüberliegende Tetraederebene zur Involutionsebene. In den 36 quaternär cyklischen, windschief hyperbolischen Collineationen unter (Iβ_2) entsprechen je zwei durch eine Diagonale der Cf. gehende Cf.-ebenen sich selbst; die in jeder dieser beiden Ebenen ausserhalb der betr. Diagonale gelegenen 4 Cf.-punkte gehen quaternär cyklisch in einander über in der Weise, dass zugleich die beiden Δ_1, welche jene Diagonale nicht zur Kante haben, in einander übergeführt werden. Die Endpunkte jener Diagonale sowie die ihrer Gegendiagonale entsprechen einander involutorisch.

Die unter (Iγ) gehörenden 32 ternären Collineationen sind planar; die Doppelebenen einer jeden von ihnen gehen durch eine Cf.-gerade, deren Punkte einander ternär cyklisch entsprechen. Je 3 Cf.-punkte und Cf.-geraden, welche mit dieser Cf.-geraden in einer Cf.-ebene liegen, gehen ternär cyklisch in einander über. Die Doppelpunkte einer Collineation dieser Art liegen auf einer Cf.-geraden der associirten Cf.

Die Axen einer der 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen (IIβ_1) erhält man, indem man die auf irgend einer Diagonale liegenden Cf.-punkte mit je einem der auf der Gegendiagonale gelegenen Cf.-punkte der associirten Cf. verbindet. Jede der 36 planar quaternären Collinea-

tionen ($II\beta_2$) hat ihre Doppelpunkte auf einer Cf.-Diagonale, ihre Doppelebenen aber gehen durch deren Gegendiagonale.

In den 72 elliptisch quaternären Collineationen ($II\beta_3$) entsprechen je ein Δ und ein Δ_1 sich selbst; ihre Quadrate sind identisch mit den 6 elliptisch geschaarten Involutionen. Die 96 senären Collineationen ($II\gamma$) nennen wir halbplanar senär, weil ihre Quadrate planar ternär cyklisch sind. Bei jeder von ihnen entspricht eine Cf.-gerade sich selbst, und deren Punkte gehen ternär cyklisch in einander über. Die Ebenen dieser Cf.-geraden sind durch die betr. Collineation involutorisch gepaart; zu den Doppelebenen dieser Involution gehört eine Cf.-ebene, wärend die beiden anderen Cf.-ebenen der Geraden in einander übergehen. Die dritte Potenz einer solchen senären Collineation ist eine centrische Involution; irgend 6 Punkte, welche in einer dieser Collineationen einen Cykel bilden, liegen demnach zu je vieren in 3 Ebenen. In den 16 geschaart ternären Collineationen ($III\gamma_1$) entsprechen 4 windschiefe Cf.-gerade sich selbst, und die auf diesen liegenden Cf.-punkte gehen, wie auch ihre übrigen Punkte, ternär cyklisch in einander über. Die Quadrate der 48 halbgeschaart senären Collineationen ($III\gamma_2$) endlich sind geschaart ternär; ihre Cuben aber sind identisch mit den 6 elliptisch geschaarten Involutionen ($I\alpha_3$).

(10.) Aus der Tabelle entnehmen wir eine Eintheilung der 576 Collineationen nach ihrer Art; wir definiren zunächst:

Eine beliebige der 576 Collineationen heisst gerade oder ungerade bez. der Cf.-punkte (Ebenen), je nachdem durch sie eine gerade oder ungerade Permutation dieser Punkte (Ebenen) bewirkt wird. Die 576 Collineationen umfassen dann:

1. die Identität.
2. 75 involutorische Collineationen, darunter
   a) 24 centrisch involutorische, von denen die eine Hälfte gerade in der Darstellung in Cf.-punkten, ungerade für Cf.-ebenen ist, während es sich mit der anderen Hälfte umgekehrt verhält.
   b) 36 hyperbolisch geschaarte, die in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen ungerade sind.
   c) 9 hyperbolisch geschaarte, die gerade in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen sind.
   d) 6 elliptisch geschaarte, welche gerade für die Cf.-punkte und die Cf.-ebenen sind.
3. 80 ternäre Collineationen, worunter
   a) 64 planare.
   b) 16 geschaarte.

Alle 80 sind gerade in der Darstellung in den Cf.-punkten und den Cf.-ebenen.

4. 180 quaternäre Collineationen, darunter
   a) 72 windschief hyperbolische, die zur Hälfte gerade für die Cf.-punkte, ungerade für die Cf.-ebenen sind; die andere Hälfte verhält sich umgekehrt.
   b) 36 planare, die in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen ungerade sind.
   c) 72 windschief elliptische, für deren Darstellung dasselbe gilt wie für die planar quaternären.
5. 240 senäre Collineationen.
   a) 192 halbplanare, die zur einen Hälfte in Cf.-punkten ungerade, in Cf.-ebenen gerade, zur anderen ungerade in Cf.-ebenen und gerade in Cf.-punkten sind.
   b) 48 halbgeschaarte, welche gerade in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen sind.

Man sieht, dass es unter den 576 Collineationen solche giebt, welche in Bezug auf die Cf.-punkte gerade — unter diesen wieder kommen gerade und ungerade Collineationeu hinsichtlich der Darstellung in Cf.-ebenen vor — und solche, die in den Cf.-punkten ungerade sind; auch diese enthalten hinsichtlich der Darstellung in Cf.-ebenen gerade und ungerade Collineationen. Betreffend den geraden oder ungeraden Charakter zerfallen also die 576 Collineationen in 4 Unterabtheilungen, und einfache substitutionentheoretische Betrachtungen ergeben, dass jede dieser Unterabtheilungen gleich viele, d. h. $\frac{576}{4} = 144$ Collineationen umfasst. Von den 576 Collineationen sind also:

I. 144 doppelt gerade, d. h. gerade in Cf.-punkten und Cf.-ebenen.
II. 144 gerade in Cf.-punkten, ungerade in Cf.-ebenen.
III. 144 ungerade in Cf.-punkten, gerade in Cf.-ebenen.
IV. 144 doppeltungerade.

Die erste Unterabtheilung bildet für sich allein, und mit jeder der folgenden Unterabtheilungen eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe G_{576} der 576 Collineationen.

Wir können die 576 Collineationen auch nach ihrem geraden oder ungeraden Charakter hinsichtlich der Transformation der Δ und Δ_1 eintheilen. Nun ist eine ternäre Collineation gerade in jeder Darstellung, also in den Cf.-punkten, Cf.-ebenen, den Δ und Δ_1. Die 80 ternären Collineationen gehören daher zur Abtheilung I der doppeltgeraden Collineationen. Die kleinste Untergruppe von G_{576}, welche die 80 ternären Collineationen enthält, ist die Gruppe der 144 doppeltgeraden Collineationen. Daraus folgt sofort, dass die doppeltgeraden Collineationen auch doppeltgerade für die Δ und Δ_1 sind. Eine centrische Involution des Typus $(I\beta_1)$ ist gerade in Cf.-punkten, ungerade in Cf.-ebenen, gerade für die Δ und ungerade für die Δ_1. Multipliciren

wir also die 144 doppeltgeraden Collineationen mit einer centrischen Involution des Typus ($I\beta_1$), so erhalten wir die 144 Collineationen, welche gerade in Cf.-punkten und ungerade in Cf.-ebenen sind, und wir finden, dass dieselben gerade in den Δ, ungerade in den Δ_1 sind u. s. w. Also:

„Die Collineationen der Gruppe G_{576}, welche gerade resp. ungerade in Cf.-punkten sind, sind auch gerade resp. ungerade in den Δ, und die Collineationen, welche gerade resp. ungerade in Cf.-ebenen sind, sind auch gerade resp. ungerade in den Δ_1."

C. Die Gruppe G_{576} der 576 Collineationen; ihre Zerlegung und Zusammensetzung.

(11.) Die Gruppe G_{576} der 576 Collineationen ist einfach transitiv, weil es in ihr Collineationen giebt, die eine beliebige Cf.-ebene resp. einen beliebigen Cf.-punkt in eine beliebig angenommene Cf.-ebene resp. einen beliebigen Cf.-punkt überführen; die Gruppe ist imprimitiv *), da sich die Cf.-ebenen und die Cf.-punkte in je 3 Quadrupel theilen lassen, welche bei den 576 Collineationen theils ihre 4 Elemente unter sich permutiren, theils in einander übergehen. Wir wollen nun die Gruppe G_{576} als Erzeugniss möglichst weniger ihrer Individuen darstellen; zu dem Ende suchen wir zunächst Untergruppen von G_{576} auf, und zwar ist es am zweckmässigsten, Reihen der Zusammensetzung**) von G_{576} zu bilden, da man dann aus jeder zu irgend einer Reihe gehörenden Gruppe durch Hinzufügung einer oder einiger Collineationen die vorhergehende, umfassendere Gruppe erzeugen kann.

Eine Reihe der Zusammensetzung von G_{576} ist z. B. die folgende:

1) G_{576}, die Gruppe aller 576 Collineationen.
2) G_{288}, die Gruppe der in den Cf.-punkten geraden Collineationen.
3) G_{144}, die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen.
4) G_{48}, die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3$.
5) G_{16}, die Gruppe ($I\alpha$) der Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 . \Delta_1{}^2 . \Delta_1{}^2 . \Delta_1{}^3$.
6) G_8 enthält die Involutionen von G_{16}, welche zwei Gegenkanten eines Δ in sich transformiren und ausserdem die Identität.
7) G_4 resultirt aus zwei beliebigen Involutionen von G_8.
8) G_2 enthält eine Involution von G_4 und die Identität.
9) G_1 ist die Identität.

Die Factoren der Zusammensetzung haben also die Reihenfolge:

$$2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2;$$

andere zu G_{576} gehörige Reihen, welche dieselbe Folge der Factoren

---

*) Vgl. Netto, Substitutionentheorie p. 77.

**) Ebenda p. 87.

haben, erhält man leicht. So kann man z. B. statt der obigen Gruppe G_{288} die Gruppe der in den Cf.-ebenen geraden Collineationen nehmen; G_{48} kann ersetzt werden durch die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen, welche jedes Δ_1 in sich selbst transformiren.

Eine andere Folge der Factoren hat nachstehende Reihe:

1) G_{576}.
2) G_{288} ist dieselbe Gruppe wie oben.
3) G_{96}, die Gruppe der 96 Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3$.
4) G_{48} wie oben u. s. w.

Die Factoren haben diesmal die Reihenfolge,

$$2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2.$$

Dass die Factoren aller Reihen bis auf die Aufeinanderfolge übereinstimmen, ist aus der Substitutionentheorie bekannt*). Wir behaupten nun:

„Reihen der Zusammensetzung von G_{576}, welche andere Folgen der Factoren haben als die beiden angeführten, giebt es nicht.“

Beim Beweise werden wir den Begriff der „Hauptreihe“ einer Gruppe**) benutzen, welche man aus einer Reihe ableitet, indem man von dieser nur diejenigen Gruppen zurückbehält, welche ausgezeichnete Untergruppen jener Gruppe sind; so leitet man aus der ersten der oben angegebenen Reihe die Hauptreihe ab:

$$G_{576}, G_{288}, G_{144}, G_{48}, G_{16}, G_1.$$

Ferner bemerken wir noch, dass eine zu einer beliebigen Hauptreihe gehörende Gruppe, welche eine Collineation irgend eines Typus enthält, alle Collineationen desselben Typus enthält, ein Resultat, das aus dem an späterer Stelle bewiesenen Satze folgt:

„Zu jeder Collineation der Gruppe G_{576} giebt es eine Reihe von Collineationen σ der Gruppe, welche α in eine beliebige andere Collineation α' desselben Typus (durch den Process $\sigma^{-1}\alpha\sigma = \alpha'$) überführen.“

In allen Reihen der Zusammensetzung von G_{576} sind die zu den letzten 4 Gruppen gehörigen Factoren sämmtlich gleich 2. Denn wäre das in einer Reihe nicht der Fall, so würde das Product der 4 letzten Factoren entweder $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ oder $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ sein; in der Reihe ginge also den 4 letzten Gruppen eine Gruppe G_{24} von 24 Collineationen oder eine Gruppe G_{36} von 36 Collineationen voran. Aus der eben gemachten Bemerkung ergiebt sich bei einiger Ueberlegung, dass ausser G_1 keine ausgezeichnete Untergruppe von G_{576}

*) Netto, a. a. O. p. 90.
**) Ebenda, p. 92.

existirt, deren Grad ein Theiler von 24 oder 36 wäre; in der der betr. Reihe entsprechenden Hauptreihe würde demnach der Gruppe G_1 eine Gruppe H vorangehen, deren Grad grösser als 24 resp. als 36 wäre, und zwischen dieser Gruppe H und G_1 würden in der Reihe Gruppen stehen — zu welchen G_1 mitzuzählen ist —, welche theils die Factoren 2, theils die Factoren 3 besitzen, während diese Factoren nach der allgemeinen Theorie einander gleich sein müssten*). Somit sind in jeder Reihe die fünf letzten Gruppen hinsichtlich ihrer Grade so zu bezeichnen:

$$G_1,\ G_2,\ G_4,\ G_8,\ G_{16}.$$

G_{16} stellt in allen Reihen dieselbe Gruppe dar, sie umfasst die Identität, die 6 elliptisch geschaarten Involutionen ($I\alpha_3$) und die 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen ($I\alpha_2$); wir werden noch auf sie zurückkommen. Wir beweisen nunmehr, dass es keine Reihe von G_{576} giebt, in welcher der erste Factor der Zusammensetzung den Werth 3 hat. Wir nehmen die Möglichkeit einer solchen Reihe an; sie sei:

$$G_{576},\ G_{192},\ H,\ J,\ \ldots.$$

Oben hatten wir eine Reihe

$$G_{576},\ G_{288},\ G_{96},\ \ldots.$$

Es gilt nun der Satz:**)

„Folgt in einer zur Gruppe G_{576} gehörenden Reihe eine Gruppe G_{288} auf G_{576}, in einer zweiten Reihe eine Gruppe G_{192} auf G_{576}, so giebt es auch Reihen:

$$G_{576},\ G_{288},\ H_{96},\ \ldots,$$
$$G_{576},\ G_{192},\ H_{96},\ \ldots,$$

in welchen auf G_{288} resp. G_{192} dieselbe Maximaluntergruppe H_{96} folgt, welche in Bezug auf G_{192} resp. G_{288} denselben Factor besitzt, wie G_{288} resp. G_{192} hinsichtlich G_{576}, und daher 96 Collineationen enthält."

Die Gruppe H_{96} besteht aus allen G_{288} und G_{192} gemeinsamen Collineationen; da sie sowohl mit G_{192} als auch mit G_{288} vertauschbar ist, so ist sie mit der ganzen Gruppe G_{576} vertauschbar, und enthält daher alle Collineationen, von deren Typus sie eine enthält. Sie ist Untergruppe von G_{288}; die mit G_{288} bezeichnete Gruppe der in Cf.-punkten geraden Collineationen umfasst:

Die Identität, 9 hyperbolisch und 6 elliptisch geschaarte, 12 centrische Involutionen, 36 hyperbolisch quaternäre, 64 planar und

*) Netto, a. a. O. p. 94.

**) Ebenda, p. 89.

16 geschaart ternäre, 48 halbgeschaart und 96 halbplanar senäre Collineationen. Hiervon kommen die 96 halbplanar senären nicht in Betracht, da sie allein keine Gruppe bilden. Besässe nun H_{96} gerade und ungerade Collineationen in Cf.-ebenen, so enthielte diese Gruppe von jeder Art gleich viele, also 48. Die 48 halbgeschaart senären Collineationen gehören nicht zu dieser Gruppe, da sie mit der Identität zusammen schon 49 doppeltgerade Collineationen darstellen. Ebensowenig können unter den doppeltgeraden Collineationen von H_{96} die 16 geschaart ternären Collineationen enthalten sein; denn um diese 16 Collineationen und die Identität zu 48 Collineationen zu ergänzen, bedürfte man ihrer noch 31; diese Zahl 31 aber lässt sich nicht aus den Anzahlen der übrigen in Betracht kommenden Collineationen

$$9,\ 6,\ 32,\ 32$$

durch Summirung erzeugen. Wohl aber bilden die Identität, die 9 hyperbolisch und 6 elliptisch geschaarten, die 12 centrischen Involutionen und die 36 hyperbolisch quaternären Collineationen der obigen Gruppe G_{288} mit denjenigen 32 planar ternären Collineationen, welche die 3Δ in sich selbst überführen, eine ausgezeichnete Untergruppe H_{96} von G_{576}. Die Collineationen dieser Gruppe führen die 3Δ in sich selbst über. Wir finden:

> „Es giebt zwei und nur zwei ausgezeichnete Untergruppen H_{96} von G_{576}, welchen doppeltgerade und einfach gerade Collineationen angehören.“

Die eine umfasst alle Collineationen, die die 3Δ in sich selbst überführen, die Collineationen der anderen transformiren die Δ_1 in sich selbst. Eine Gruppe H_{96}, welche nur doppeltgerade Collineationen enthält, giebt es überhaupt nicht, da ihr Grad 96 nicht ein Theiler des Grades 144 aller doppeltgeraden Collineationen ist. (Nebenbei sei bemerkt, dass es auch keine ausgezeichnete Untergruppe L_{96} giebt, welche 48 doppeltgerade und 48 doppeltungerade Collineationen enthält). In der Reihe

$$G_{576},\ G_{192},\ H_{96},\ \ldots,$$

in welcher also H_{96} nur die Gruppe der 96 Collineationen sein kann, welche die 3Δ in sich selbst überführen, soll der Voraussetzung nach G_{192} mit G_{576} permutabel sein. Eine Gruppe G_{192}, welche H_{96} als Untergruppe enthält, können wir aber nur erzeugen durch H_{96} und eine Collineation, welche 2Δ in einander transformirt. Durch Transformation einer so erzeugten Gruppe G_{192} durch die Collineationen von G_{576} würde man jedoch auch Collineationen erhalten, welche zwei andere Δ in einander überführen; daher kann G_{192} unmöglich ausgezeichnete Untergruppe von G_{576} sein.

Wir haben bewiesen:

„Es giebt keine Reihe der Zusammensetzung von G_{576}, deren erster Factor 3 ist.“

Den Beweis, dass es keine Reihen von G_{576} giebt, deren Factoren die Folge 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2 haben, unterdrücken wir der Kürze halber.

(12.) Wir steigen nun in einer Reihe der Zusammensetzung von G_{576} aufwärts, und werden so dazu gelangen, die Gruppe G_{576} aus wenigen Collineationen zu erzeugen. Wir wählen die an erster Stelle gegebene Reihe (10):

$$G_1, (G_2, G_4, G_8), G_{16}, G_{48}, G_{144}, G_{288}, G_{576}.$$

Die Gruppe G_{16} besteht aus der Identität, 6 elliptisch und 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen, enthält also nur involutorische Collineationen; da aber zwei Involutionen, deren Product wieder eine Involution ist, mit einander vertauschbar sind, so sind alle Collineationen von G_{16} mit einander vertauschbar, und diese Gruppe lässt sich aus 4 ihrer Involutionen, von welchen keine aus den anderen resultirt, erzeugen.

G_{48} ist das Erzeugniss von G_{16} mit irgend einer planar ternären Collineation, welche die 3Δ in sich selbst überführt. Eine geschaart ternäre Collineation erzeugt mit G_{48} die Gruppe G_{144} der doppeltgeraden Collineationen von G_{576}. Ferner resultirt G_{288} aus der Verbindung von G_{144} mit einer in Cf.-punkten geraden, in Cf.-ebenen ungeraden Collineation, etwa einer centrischen Involution des Typus $(\mathrm{I}\,\beta_1)$. G_{576} endlich wird durch G_{288} und eine beliebige in Cf.-punkten ungerade Collineation, z. B. eine centrische Involution des Typus $(\mathrm{II}\,\alpha_1)$ erzeugt. Wir haben damit die ganze Gruppe G_{576} aus acht ihrer Collineationen erzeugt.

Wir beschränken uns nun darauf, die Gruppe G_{576} aus möglichst wenigen centrischen Involutionen zusammenzusetzen, und können nach dem vorhergehenden diese Aufgabe auch so formuliren:

„Wir suchen eine möglichst geringe Anzahl von centrischen Involutionen, aus denen sich die Gruppe G_{16} und noch je eine planar- und eine geschaart-ternäre Collineation zusammensetzen lassen.“

Solche centrische Involutionen erzeugen die Gruppe G_{576}. Wir werden finden, dass die Gruppe aus 4 centrischen Involutionen, von denen zwei gerade in Cf.-punkten, die beiden anderen gerade in Cf.-ebenen sind, erzeugt werden kann. Dass hierzu weniger als 4 centrische Involutionen nicht ausreichen, dass ferner von 4 die Gruppe G_{576} zusammensetzenden centrischen Involutionen zwei gerade in Cf.-punkten und zwei gerade in Cf.-ebenen sein müssen, und dass die beiden ersteren nicht dieselben zwei Δ_1 vertauschen dürfen, ebensowenig wie die beiden

letzteren dieselben zwei Δ, leuchtet bei einiger Ueberlegung ein. Seien nun i_1, i_2 zwei centrische Involutionen des einen Typus, während k_1, k_2 zwei des anderen Typus bezeichnen sollen. In Bezug auf die Transformation der Δ und Δ_1 mögen diese 4 Involutionen die folgenden Formen haben, in welchen p, q, r irgend eine Permutation von 1, 2, 3 bedeutet:

$$i_1 = \Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 . \Delta_1^p . \Delta_1^q \, \Delta_1^r, \qquad i_2 = \Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 . \Delta_1^q . \Delta_1^p \, \Delta_1^r,$$
$$k_1 = \Delta^p . \Delta^q \, \Delta^r . \Delta_1^1 . \Delta_1^2 . \Delta_1^3, \qquad k_2 = \Delta^q . \Delta^p \, \Delta^r . \Delta_1^1 . \Delta_1^2 . \Delta_1^3.$$

Dann ist

$$i_1 . i_2 = \Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 . \Delta_1^p \, \Delta_1^r \, \Delta_1^q$$

eine planar ternäre Collineation, und

$$i_1 \, i_2 . k_1 \, k_2 = \Delta^p \, \Delta^r \, \Delta^q . \Delta_1^p \, \Delta_1^r \, \Delta_1^q$$

entweder geschaart ternär oder halbgeschaart senär; im letzteren Falle aber ist das Quadrat geschaart ternär. Wählen wir also noch die Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 der Art, dass sie die Gruppe G_{16} erzeugen, so resultirt aus ihnen nach den obigen Ausführungen die ganze Gruppe G_{576}.

Beispiel I.

i_1 = 12*. 21. 34. 43. 13 14. 31 41. 24 32. 42 23.

i_2 = 41*. 14. 23. 32. 12 31. 21 13. 34 24. 43 42.

k_1 = 12 21. 13 31. 23 32. 34. 43. 24. 42. 14. 41. (4 ist Involutionsebene),

k_2 = 21 34. 31 42. 41 23. 12. 43. 13. 24. 14. 32. (432 ist Involutionsebene).

Die Gruppe G_{16} wird erzeugt z. B. durch die Collineationen

$$s_1 = (i_1 k_1)^2, \quad s_2 = (i_2 k_2)^2, \quad s_3 = i_2 (i_1 k_1)^2 i_2, \quad s_4 = i_1 (i_2 k_2)^2 i_1 .$$

Die Involutionsebenen 4 und 432 von k_1 und k_2 gehen bez. durch die Centra 41 und 12 von i_2 und i_1, nicht aber durch deren Verbindungsgerade. Suchen wir nun alle möglichen Quadrupel i_1, i_2, k_1, k_2 von centrischen Involutionen der Gruppe G_{576} auf, von welchen die beiden ersteren zwei Eckpunkte verschiedener Δ_1, die beiden letzteren zwei Eckpunkte verschiedener Δ zu Involutionscentren besitzen, und welche ausserdem der Bedingung genügen, dass die Involutionsebenen der beiden letzteren bez. durch die Centra der beiden ersteren, nicht aber durch beide zugleich gehen, so finden wir für die Anzahl der verschiedenen Quadrupel 288. Andrerseits werden wir sofort beweisen, dass es in G_{576} ausser der Identität keine Collineation giebt, welche die Involutionen irgend eines Quadrupels in sich selbst überführt, und gelangen so zu dem Satze:

Jedes der 288 Quadrupel i_1, i_2, k_1, k_2 wird durch 2 Collineationen von G_{576} in ein beliebiges andres Quadrupel übergeführt; insbesondere existirt in G_{576} eine von der

Identität verschiedene Collineation, welche die Involutionen eines Quadrupels zwar nicht in sich selbst, aber paarweise in einander transformirt."

„Die Involutionen jedes der 288 Quadrupel erzeugen die Gruppe G_{576}."

Irgend eine Collineation σ, welche die Involutionen des oben angegebenen Quadrupels in sich selbst überführt, muss deren Centren $12, 41, \bar{4}, \overline{432}$ ebenfalls in sich selbst transformiren. Soll die Collineation σ ausserdem der Gruppe G_{576} angehören, so muss sie auch den dritten Cf.-punkt 31 der Geraden $\overline{41}\,\overline{12}$ in sich überführen. Da ferner die Diagonale $\overline{31}\,\overline{13}$ als Verbindungsgerade der Punkte 31 und $\bar{4}$ in sich selbst übergeht, so transformirt σ auch 13, ebenso aber 21, 42 u. s. w. in sich selbst; überhaupt gehen durch σ alle Cf.-punkte in sich selbst über, so dass σ nur die Identität sein kann. Die eben bewiesenen Sätze benutzen wir zur Herleitung eines schon erwähnten interessanten Theorems:

„Jede Collineation der Gruppe G_{576} kann durch Collineationen der Gruppe in eine beliebige andere Collineation desselben Typus transformirt werden."

Irgend eine Collineation ν der Gruppe resultirt aus den Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 eines der 288 Quadrupel; sie lässt sich als Product dieser Involutionen darstellen, also

$$\nu = \Pi(i_1, i_2, k_1, k_2).$$

Ist ν' eine Collineation desselben Typus, so können wir (nach 8) durch Abänderung der Cf.-bezeichnung bewirken, dass ν' durch dieselbe projective Beziehung dargestellt wird, wie vordem ν. Die früheren Darstellungen von i_1, i_2, k_1, k_2 repräsentiren dann vier Involutionen i_1', i_2', k_1', k_2', welche eines der obigen 288 Quadrupel bilden, und zugleich wird

$$\nu' = \Pi(i_1', i_2', k_1', k_2'),$$

worin Π dasselbe Product in den i_1', i_2', k_1', k_2' bedeutet, wie vorhin in den i_1, i_2, k_1, k_2. Ist nun ϱ diejenige Collineation von G_{576}, welche die Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 bez. in i_1', i_2', k_1', k_2' transformirt, so haben wir

$$\varrho^{-1}\nu\varrho = \varrho^{-1}\Pi(i_1, i_2, k_1, k_2)\varrho = \Pi(\varrho^{-1}i_1\varrho,\ \varrho^{-1}i_2\varrho,\ \varrho^{-1}k_1\varrho,\ \varrho^{-1}k_2\varrho),$$

d. h.

$\varrho^{-1}\nu\varrho = \Pi(i_1', i_2', k_1', k_2') = \nu'$, w. z. b. w.

Beispiel II. i_1 und i_2 seien dieselben Involutionen wie im Beispiel I; als Involutionsebenen der k wähle man zwei der drei nicht durch die Centra von i_1 und i_2 gehenden Cf-ebenen; z. B. sei

$$k_1 = 12\,21.\ 24\,42.\ 14\,41.\ 34.\ 43.\ 13.\ 31.\ 23.\ 32;$$
$$k_2 = 12\,34.\ 13\,42.\ 41\,32.\ 21.\ 43.\ 31.\ 24.\ 14.\ 23.$$

G_{16} wird erzeugt durch die Collineationen:

$$s_1 = (i_1 k_1)^2, \quad s_2 = (i_1 k_2)^2, \quad s_3 = (i_2 k_1)^2, \quad s_4 = (i_2 k_2)^2.$$

Wir brechen diese Untersuchung hier ab und bemerken nur noch, dass sich die Gruppe G_{576} u. A. aus zwei centrischen Involutionen verschiedenen Typus und einer doppeltungeraden hyperbolisch geschaarten Involution, ferner aus zwei halbplanar senären Collineationen von verschiedenem Typus zusammensetzen lässt, z. B. aus

$$\alpha = \mathbf{1.\ 2\ 3\ 4.}\ 234\ 432.\ 143\ 123\ 132\ 142\ 124\ 134.$$

und

$$\beta = \mathbf{1}\ 123\ 132\ \mathbf{3}\ 142\ 234.\ \mathbf{2}\ 134\ 143.\ \mathbf{4}\ 243\ 124.$$

(13.) Wie wir soeben dargethan haben, giebt es in der Gruppe G_{576} Collineationen, welche irgend eine Collineation der Gruppe in eine beliebige desselben Typus überführen. Sind nun φ und φ' zwei Collineationen von einerlei Typus, und möge ψ eine Verwandtschaft der Gruppe sein, welche φ in φ' transformirt, während $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die mit φ vertauschbaren Collineationen der Gruppe bedeuten sollen, so haben die Gleichungen statt:

$$\alpha_i^{-1} \varphi \alpha_i = \varphi \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n;$$

daher ist

$$(\alpha_i \psi)^{-1} \varphi (\alpha_i \psi) = \psi^{-1} \alpha_i^{-1} \varphi \alpha_i \psi = \psi^{-1} \varphi \psi = \varphi'.$$

Da die $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \ldots n)$ von einander verschieden sind, so sind auch die $\alpha_i \psi$ verschiedene Collineationen, und wir finden, dass φ in φ' durch mindestens n Collineationen von G_{576} übergeht. Führt andrerseits eine von ψ verschiedene Verwandtschaft χ von G_{576} die Collineation φ in φ' über, so dass

$$\chi^{-1} \varphi \chi = \varphi'$$

ist, so ergiebt sich

$$(\chi \psi^{-1})^{-1} \varphi (\chi \psi^{-1}) = \psi \chi^{-1} \varphi \chi \psi^{-1} = \psi \varphi' \psi^{-1} = \varphi.$$

Existiren demnach n Collineationen, welche φ in φ' überführen, so transformiren auch n Collineationen φ in sich selbst. Es folgt:

Die Gruppe G_{576} enthält stets eine Anzahl von Collineationen, welche irgend eine Collineation der Gruppe in sich selbst überführen, und eine gleiche Anzahl von Collineationen von G_{576} transformiren die betr. Collineation in irgend eine andere desselben Typus. Man erhält jene Anzahl n, indem man die Gesammtzahl 576 der Collineationen durch die Anzahl aller Collineationen von dem betr. Typus dividirt. Mit einer centrischen Involution von G_{576} sind daher $n = \frac{576}{12} = 48$ Collineationen der Gruppe vertauschbar. Offenbar ist

eine centrische Involution der Gruppe mit allen Collineationen derselben vertauschbar, welche das Involutionscentrum und damit auch die Involutionsebene in sich selbst überführen. Es giebt aber 48 Collineationen in G_{576}, welche einen Cf.-punkt in sich selbst transformiren, und so folgt:

Die mit einer centrischen Involution i von G_{576} vertauschbaren Collineationen sind identisch mit den 48 Collineationen, welche das Involutionscentrum in sich überführen. Diese 48 Collineationen bilden eine Gruppe G_{48}. Dieselbe umfasst doppeltgerade und doppeltungerade, in Cf.-punkten gerade und in Cf.-ebenen ungerade, sowie in Cf.-ebenen gerade und in Cf.-punkten ungerade Collineationen, schliesst daher von jeder dieser 4 Arten 12 Collineationen in sich. Eine bemerkenswerthe Untergruppe G_8 von G_{48} enthält, wenn die Involution i vom Typus ($\mathrm{I}\,\beta_1$) ist, ausser der Identität 3 hyperbolisch geschaarte Involutionen, deren Axen Gegenkanten des durch die Involution i in sich selbst übergehenden Tetraeders Δ_1 sind, sowie 4 centrische Involutionen, deren Involutionsebenen dasselbe Δ_1 bilden. Unter den Collineationen von G_{48} befinden sich ferner diejenigen 6 centrischen Involutionen des Typus ($\mathrm{II}\,\alpha_1$), deren Involutionsebenen durch das Centrum von i gehen; diese 6 centrischen Involutionen erzeugen mit G_8 die Gruppe G_{48}.

D. Flächen II. Ordnung, welche durch die Collineationen gewisser Untergruppen von G_{576} in sich selbst übergeführt werden.

(14.) Im folgenden ziehen wir des öfteren die Würfelcf. zu Hilfe; der Mittelpunkt des Würfels, den wir zugleich zum Centrum der in (13.) erwähnten Involution i wählen, sei 41; es ist also:

$$i = 12\,31.\ 21\,13.\ 34\,24.\ 43\,42.\ 41.\ 14.\ 23.\ 32.$$

Die 6 centrischen Involutionen vom Typus ($\mathrm{II}\,\alpha_1$) der Gruppe G_{48}, deren Involutionsebenen durch 41 gehen, stellen sich bei der vorausgesetzten Würfelcf. dar als Spiegelungen an den 6 Diagonalebenen des Würfels. Die 3 hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_8 sind Spiegelungen an den durch 41 gehenden Parallelen zu den Würfelkanten, und die 4 centrischen Involutionen von G_8 sind Spiegelungen am Punkte 41 und an den 3 Halbirungsebenen paralleler Würfelkanten.*) Die Gruppe G_{48} lässt sich also im Falle der oben angegebenen Würfelcf. aus Spiegelungen am Centrum des Würfels und an Geraden und Ebenen, die durch das Centrum gehen, zusammensetzen. Durch alle diese Spiegelungen aber gehen die Kugeln, welche den Würfelmittelpunkt zum Centrum besitzen, in sich selbst über. Die concentrischen Kugeln bilden ein Büschel von Flächen II. Ordnung,

*) Vgl. Klein, Icosaeder p. 17—23.

und da die Würfelconfiguration in jede Cf. ($12_6, 16_3$) collinear transformirt werden kann, so folgt:

„Durch die 48 Collineationen von G_{576}, welche einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, gehen die Flächen eines Büschels von (nicht geradlinigen) Flächen II. O. in sich selbst über. Jeder beliebige Punkt irgend einer dieser Flächen wird durch die 48 Collineationen in Punkte derselben Fläche transformirt.“

Aus der Würfelcf. leitet man folgende Eigenschaften der Flächen des Büschels leicht ab:

„Diese Flächen haben das Tetraeder Δ_1, welchem jener Cf.-punkt angehört, zum gemeinschaftlichen Poltetraeder und bestimmen in der dem Cf.-punkte gegenüberliegenden Tetraederfläche dasselbe polare Feld.“

Für das folgende ist der Nachweis von Wichtigkeit, dass keine dieser Flächen durch mehr als 48 Collineationen von G_{576} in sich selbst transformirt wird. Wir bedienen uns wieder der Würfelcf. und sei 41 das Centrum des zugehörigen Würfels. Da jede Kugel mit dem Centrum 41 von den 3 Tetraedern Δ_1 nur das Tetraeder 41 14 23 32 als Poltetraeder besitzt, so führt jede Collineation von G_{576}, welche eine solche Kugel in sich selbst transformirt, das Tetraeder 41 14 23 32 (in ein Poltetraeder der Kugel, also) in sich selbst über. Von den 192 Collineationen der Gruppe, welche das Tetraeder in sich selbst übergehen lassen, transformiren aber nur jene 48 den Punkt 41 in sich selbst; die übrigen 144 transformiren den Punkt 41 in je einen der Punkte 14, 23, 32 und folglich die Kugel in Flächen II. O., welche je einen dieser 3 unendlich fernen Punkte einschliessen. Hieraus folgt:

„Diejenigen 48 Collineationen von G_{576}, welche irgend einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, transformiren einen beliebigen Punkt in 48 Punkte einer Fläche II. O.; auf dieser Fläche liegt im Allgemeinen kein neunundvierzigster von den 576 Punkten, in welche jener Punkt durch die Collineationen von G_{576} übergeführt wird.“*)

Wir theilen nun die Collineationen der Gruppe G_{576} in 12 Unterabtheilungen ein: die erste derselben umfasst die 48 Collineationen, welche einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, also eine Gruppe G_{48} bilden; die zweite Abtheilung erhält man, wenn man eine nicht zu G_{48} gehörige Collineation von G_{576} mit den Collineationen von G_{48} hinten multiplicirt. Die 48 so erzeugten Collineationen bilden übrigens keine Gruppe. Die dritte Abtheilung umfasst die 48 Collineationen,

*) Dass die 48 Punkte i. A. nicht auf einer biquadratischen Raumcurve, d. h. auf mehr als einer Fläche II. O. liegen, erkennt man leicht, wenn man den zu transformirenden Punkt auf einer Cf.-geraden der Würfelcf. annimmt.

welche aus der Multiplication einer nicht in den beiden ersten Unterabtheilungen enthaltenen Verwandtschaft mit den Collineationen von G_{48} resultiren u. s. f. Die 48 Collineationen jeder Abtheilung transformiren irgend einen Punkt in 48 Punkte einer Fläche II. O.; ist nämlich β diejenige Collineation, durch deren Multiplication mit den Verwandtschaften von G_{48} die Collineationen einer der zwölf Unterabtheilungen entstehen, und führt β irgend einen Punkt P in P_1 über, so sind die Punkte, in welche P durch die Verwandtschaften der betr. Unterabtheilung übergeht, identisch mit den 48 Punkten, in welche P_1 durch die Collineationen von G_{48} übergeht, und diese 48 Punkte liegen nach früherem auf einer Fläche II. O., F^2. Die zu den 12 Unterabtheilungen gehörenden F^2 sind Flächen eines Büschels, und zwar im Falle der Würfelcf. eines Kugelbüschels, wenn die Collineationen von G_{48} den Mittelpunkt des Würfels in sich transformiren. Da nun derjenige Cf.-punkt, welchen die Collineationen der Gruppe G_{48} sich selbst entsprechen lassen, ein beliebiger unter den 12 Cf.-punkten ist, so schliessen wir:

> „Die 576 Punkte, in welche ein beliebiger Punkt durch die Collineationen von G_{576} übergeführt wird, liegen zu je 48 auf 144 Flächen II. O., welche sich zu zwölfen auf 12 Flächenbüschel vertheilen. Zu jeder Fläche irgend eines der 12 Büschel lässt sich je eine der 11 anderen so bestimmen, dass die Gruppe dieser 12 Flächen durch die Collineationen von G_{576} in sich selbst übergeht."

Seien nämlich $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ Collineationen von G_{576}, welche den durch die Collineationen der obigen Gruppe G_{48} in sich selbst übergehenden Punkt 41 in je einen der übrigen 11 Cf.-punkte überführen. Wir theilen dann die 576 Collineationen in 12 Unterabtheilungen ein, welche man erhält, wenn man die Collineationen von G_{48} hinten bez. mit der Identität, $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ multiplicirt. Sei F^2 eine der 12 Flächen, die durch die Collineationen von G_{48} in sich übergehen, und möge F^2 durch $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ bez. in $F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ übergehen; dann geht F^2 über in $F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ bez. durch alle Collineationen der zweiten, dritten, ... letzten Unterabtheilung. Ferner geht F_2^2 über in F^2 durch β_2^{-1}, also F_2^2 über in $F^2, F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ bez. durch alle Collineationen, die man erhält, wenn man β_2^{-1} mit den Collineationen der ersten, zweiten, dritten, ... letzten Unterabtheilung hinten multiplicirt. Ueberhaupt werden durch die Collineationen von G_{576} die 12 Flächen $F^2, F_2^2, \ldots$ unter sich permutirt. Sind $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{48}$ die Collineationen von G_{48}, so geht nach dem vorhergehenden F_2^2 in sich selbst über durch die Collineationen $\beta_1 = 1$, $\beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2, \beta_2^{-1}\alpha_3\beta_2, \ldots \beta_2^{-1}\alpha_{48}\beta_2$. Die Fläche F_2^2 gehört demnach

zu demjenigen der obigen 12 Büschel, dessen Flächen durch die Gruppe $\beta_2^{-1} G_{48} \beta_2$ in sich selbst übergehen.

Die 16 Collineationen, welche zwei Eckpunkte eines Tetraeders Δ_1 in sich selbst transformiren, führen irgend einen Punkt in 16 Punkte zweier Flächen II. O., also in 16 Punkte einer biquadratischen Raumcurve über. Die 16 Punkte liegen zu achten auf zwei Kegelschnitten, in welche die Raumcurve zerfällt. Im Falle der Würfelcf. liegen sie, wenn 41 und 14 sich selbst entsprechen, auf zwei congruenten Kreisen, welche $\overline{14\ 41}$ zur gemeinsamen Axe haben.

Mit einer hyperbolisch geschaarten Involution vom Typus $(\mathrm{I}\alpha_2)$ ist eine Gruppe von 64 Collineationen der Gruppe G_{576} vertauschbar; diese 64 Collineationen führen nur eine Fläche II. O. in sich selbst über, nämlich die imaginäre Ordnungsfläche der in (2) erwähnten polaren Correlation σ. Eine halbplanar senäre Collineation vom Typus $(\mathrm{II}\gamma)$ und $(\mathrm{III}\beta)$ ist nur mit ihren 6 Potenzen vertauschbar.

E. Die desmische Fläche IV. Ordnung.*)

(15.) Wir wenden uns nun zu den interessantesten Untergruppen von G_{576}, den Gruppen nämlich, welche die 3Δ resp. die $3\Delta_1$ in sich selbst transformiren. Von diesen beiden Gruppen von je 96 Collineationen brauchen wir nur die eine zu besprechen und wir beschränken uns auf die erstere G_{96}. Die Ebenenquadrupel, welche je eines der 3Δ bilden, gehören einem Büschel von Flächen IV. Ordnung an, weil jedes von ihnen durch die 16 Cf.-geraden, den Schnitt der beiden anderen Quadrupel, geht (1.). Da nun von diesem Flächenbüschel 3 Flächen (nämlich die 3 Ebenenquadrupel der Δ) durch die Collineationen der Gruppe G_{96} in sich selbst übergehen, so erfreut jede Fläche des Büschels sich dieser Eigenschaft. Also:

„Die 96 Collineationen, welche die 3Δ in sich selbst überführen, transformiren einen beliebigen Punkt in 96 Punkte einer Fläche IV. O., F^4; diese sog. desmische Fläche F^4 geht durch die 96 Collineationen in sich selbst über, sie enthält die 16 Cf.-geraden und hat demnach die 12 Cf.-punkte zu Doppelpunkten.“

Die 576 Collineationen gruppiren die desmischen Flächen zu sechsen so, dass jede Gruppe von 6 derselben durch alle 576 Collineationen in sich selbst transformirt wird.

*) Vgl. Stahl, Crelle's Journal 101, p. 90. Humbert, Journal de Math. 4e série 7, p. 353. Study, Sphärische Trigonometrie. XX. Band d. Abh. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., Nr. 2, p. 210.

(16.) Jede biquadratische Raumcurve, welche zwei Tetraedern Δ_1 umschrieben ist, hat mit der desmischen Fläche F^4 acht Doppelpunkte gemein. Verbindet sie die 8 Doppelpunkte mit irgend einem anderen Punkte P von F^4, so liegt sie ganz auf der Fläche F^4. Daraus folgt sofort, dass eine Fläche II. O., welche zweien Δ_1 umschrieben ist, die F^4 in zwei biquadratischen Raumcurven durchschneidet. Umgekehrt können 2 auf F^4 gelegene biquadratische Raumcurven, welche denselben zwei Δ_1 umschrieben sind, durch eine Fläche II. O. verbunden werden. Also:

„Die desmische Fläche IV. O. enthält 3 Schaaren biquadratischer Raumcurven, welche je zweien der Tetraeder Δ_1 umschrieben sind.“

Verbinden wir irgend zwei Raumcurven derselben Schaar mit den übrigen Raumcurven der Schaar durch zwei Büschel von Flächen II. O., so sind diese projectiv auf einander bezogen und erzeugen die Fläche F^4. Da jede Raumcurve der Schaar sich selbst conjugirt ist bez. der beiden F^2-Bündel, welchen die anderen beiden Schaaren angehören (6), so ist auch die Fläche F^4 sich selbst conjugirt zunächst bez. jener 2 Bündel, dann aber ebenso bez. des dritten. Sind nun P und P' zwei Punkte von F^4, welche bez. eines der 3 F^2-Bündel conjugirt sind, und sind k^4 und $k_1{}^4$ die beiden durch P resp. P' gehenden biquadratischen Raumcurven dieses Bündels, so sind P und P' auch conjugirt bez. aller durch k^4 oder $k_1{}^4$ gehenden Flächen des Bündels. Die Gerade $\overline{PP'}$ berührt daher die Flächen und folglich die beiden Raumcurven in P resp. P'. Da aber k^4 und $k_1{}^4$ auf der F^4 liegen, so folgt:

„Die Tangenten der 3 auf F^4 gelegenen Schaaren biquadratischer Raumcurven sind Doppeltangenten der Fläche. Durch einen beliebigen Punkt P der Fläche gehen 3 der Raumcurven, und deren Tangenten in P berühren die Fläche F^4 in P und in den 3 Punkten, welche dem Punkt P hinsichtlich der 3 Flächenbündel conjugirt sind.“

Da die drei betr. Tangenten in der Ebene liegen, welche die desmische Fläche in P berührt, so ergiebt sich:

„Die 3 Punkte, welche irgend einem Punkt hinsichtlich jener 3 Flächenbündel conjugirt sind, liegen mit ihm in einer Ebene.“*)

Weisen wir nun jedem Punkte des Raumes die auf diese Weise durch ihn bestimmte Ebene zu, so erhalten wir ein höheres Nullsystem, in

*) Die 3 Punkte liegen sogar auf einer Geraden; der Beweis ergiebt sich in Verbindung mit den obigen Ausführungen unmittelbar aus einem von Humbert a. a. O. p. 386 angeführten Satze.

welchem die desmische Fläche F^4 als sich selbst zugeordnet betrachtet werden kann. Jedem Punkte entspricht in dem Nullsysteme i. A. eine Ebene. Die Punkte, welche einer beliebigen Ebene zugeordnet sind, erhalten wir als die Schnittpunkte der Ebene mit zweien der Flächen III. O., welche der Ebene hinsichtlich der 3 Flächenbündel conjugirt sind, so dass in dem Nullsysteme einer Ebene 9 Punkte, die Basispunkte eines Büschels von Curven III. O., entsprechen. In diesen Punkten wird die Ebene von desmischen Flächen des in (15.) erwähnten Büschels berührt.

„Die 16 Geraden einer Cf. $(12_6, 16_3)$ bilden die Grundcurve eines Büschels von desmischen Flächen IV. O.; eine beliebige Ebene wird von 9 dieser Flächen berührt.“

F. Ueber die 1152 Collineationen und 1152 Correlationen, welche eine harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ in sich selbst transformiren.

(17.) Die 576 Collineationen, welche zwei associirte Cff. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen, sind schon besprochen worden. (8.—10.). Bei den 576 Collineationen, welche zwei associirte Cff. $(12_6, 16_3)$ in einander transformiren, sind hinsichtlich der Ueberführung der Δ in die Δ_1 drei verschiedene Fälle möglich.

I. Es gehen je ein Δ und ein Δ_1 in einander über z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1)(\Delta^2 \Delta_1^2)(\Delta^3 \Delta_1^3).$$

II. Es können ein Δ und ein Δ_1 in einander übergehen, während die übrigen Δ und Δ_1 einen quaternären Cykel bilden, z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1)(\Delta^2 \Delta_1^2 \Delta^3 \Delta_1^3).$$

III. Die 3Δ und $3\Delta_1$ gehen senär cyklisch in einander über z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1 \Delta^2 \Delta_1^2 \Delta^3 \Delta_1^3).$$

Entsprechend diesen 3 möglichen Fällen theilen wir die 576 Collineationen in 8 verschiedene Typen ein, wie folgt:

I. 96 Collineationen vertauschen die 3Δ mit je einem Δ_1; darunter sind

1) 48 involutorische und zwar

(α) 12 elliptisch geschaarte z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{12}.\ \mathbf{2}\,\overline{21}.\ \mathbf{3}\,\overline{34}.\ \mathbf{4}\,\overline{43}.\ 234\,\overline{13}.\ 143\,\overline{24}.\ 124\,\overline{31}.\ 132\,\overline{42}.$$
$$432\,\overline{14}.\ 134\,\overline{23}.\ 142\,\overline{32}.\ 123\,\overline{41}.$$

(β) 36 hyperbolisch geschaarte z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}.\ \mathbf{2}\,\overline{12}.\ \mathbf{3}\,\overline{34}.\ \mathbf{4}\,\overline{43}.\ 234\,\overline{32}.\ 143\,\overline{41}.\ 124\,\overline{23}.\ 132\,\overline{14}.$$
$$432\,\overline{42}.\ 134\,\overline{31}.\ 142\,\overline{13}.\ 123\,\overline{24}.$$

2) 48 quaternäre, deren Quadrate die 6 elliptischen Involutionen von G_{576} sind.

(α) 36, in welchen die gemeinschaftlichen Gegenkanten eines der Paare sich vertauschender Δ und Δ_1 sich selbst entsprechen, die gemeinschaftlichen Gegenkanten von jedem der anderen zwei Paare Δ und Δ_1 in einander übergehen z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}\ \mathbf{2}\,\overline{34}.\ \mathbf{3}\,\overline{21}\ \mathbf{4}\,\overline{12}.\ 234\,\overline{13}\ 132\,\overline{42}.\ 143\,\overline{24}\ 124\,\overline{31}.$$
$$432\,\overline{32}\ 142\,\overline{14}.\ 134\,\overline{41}\ 123\,\overline{23}.$$

(β) 12, in welchen die drei paar gemeinsamen Gegenkanten der sich paarweise entsprechenden Δ und Δ_1 in sich selbst übergehen z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{34}\ \mathbf{2}\,\overline{43}.\ \mathbf{3}\,\overline{12}\ \mathbf{4}\,\overline{21}.\ 234\,\overline{24}\ 132\,\overline{31}.\ 143\,\overline{13}\ 124\,\overline{42}.$$
$$432\,\overline{41}\ 142\,\overline{23}.\ 134\,\overline{32}\ 123\,\overline{14}.$$

II. 288 Collineationen vertauschen ein Δ und ein Δ_1 mit einander, und lassen die übrigen Δ und Δ_1 quaternär cyklisch in einander übergehen.

1) 144 quaternäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}.\ \mathbf{2}\,\overline{12}.\ \mathbf{3}\,\overline{34}\ \mathbf{4}\,\overline{43}.\ 234\,\overline{42}\ 123\,\overline{23}.\ 143\,\overline{13}\ 142\,\overline{41}.\ 124\,\overline{24}$$
$$432\,\overline{32}.\ 132\,\overline{31}\ 134\,\overline{14}.$$

Ihre Quadrate sind die 36 doppeltgeraden hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_{576}.

2) 144 octenäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}.\ \mathbf{2}\,\overline{34}.\ \mathbf{3}\,\overline{12}\ \mathbf{4}\,\overline{21}.\ 234\,\overline{42}\ 142\,\overline{32}\ 124\,\overline{24}\ 134\,\overline{23}.\ 432\,\overline{41}$$
$$143\,\overline{13}\ 123\,\overline{14}\ 132\,\overline{31}.$$

Ihre Quadrate sind die 36 planar quaternären Collineationen von G_{576}.

III. 192 Collineationen führen die $3\,\Delta$ und $3\,\Delta_1$ senär cyklisch in einander über.

1) 96 senäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}\ 124\,\overline{13}\ 123\,\overline{32}.\ \mathbf{2}\,\overline{21}\ 143\,\overline{24}\ 134\,\overline{23}.\ \mathbf{3}\,\overline{12}\ 132\,\overline{31}\ 432\,\overline{41}.$$
$$\mathbf{4}\,\overline{34}\ 234\,\overline{42}\ 142\,\overline{14}.$$

Ihre Quadrate sind die 16 geschaart ternären Collineationen von G_{576}.

2) 96 duodenäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}\ 143\,\overline{24}\ 432\,\overline{32}\ \mathbf{3}\,\overline{34}\ 234\,\overline{42}\ 123\,\overline{41}.\ \mathbf{2}\,\overline{43}\ 124\,\overline{13}\ 142\,\overline{23}$$
$$\mathbf{4}\,\overline{12}\ 132\,\overline{31}\ 134\,\overline{14}.$$

(18.) Die schon früher besprochene polare Correlation σ (2), welche die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 zu Poltetraedern besitzt, giebt uns die Mittel an die Hand, aus den Eintheilungen der 1152 Collineationen, welche eine harmonische Cf. in sich transformiren, eine Eintheilung der 1152 das gleiche leistenden Correlationen auf äusserst einfache Weise herzuleiten. Diese 1152 Correlationen bilden mit den 1152 Collineationen eine Gruppe G_{2304}. Alle Verwandtschaften dieser Gruppe führen die polare Correlation σ in sich selbst über, weil sie die Gruppe der 6 Poltetraeder Δ und Δ_1 von σ ungeändert lassen; σ theilt sonach mit der Identität die Eigenschaft, mit allen Verwandtschaften der Gruppe G_{2304} vertauschbar zu sein. Sind nun

$$\alpha \text{ und } \beta$$

zwei solche Verwandtschaften von G_{2304}, dass

$$\alpha = \beta\sigma = \sigma\beta$$

ist, so folgt

$$\beta = \alpha\sigma = \sigma\alpha,$$

ferner

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = \alpha^{-1}\alpha\sigma\alpha = \sigma\alpha = \beta.$$

Nennen wir daher zwei Verwandtschaften α und β von G_{2304}, welche durch die Gleichung verbunden sind:

$$\alpha = \beta\sigma = \sigma\beta \quad \text{oder} \quad \beta = \alpha.\sigma = \sigma.\alpha$$

für den Moment „zusammengehörig“, so ergiebt sich:

1) „Zusammengehörige Verwandtschaften von G_{2304} sind vertauschbar.“
2) „Sind α und β zusammengehörige Verwandtschaften, so enthält G_{2304} vom Typus der α und vom Typus der β gleich viele Verwandtschaften.“

Ist nämlich ν irgend eine Verwandtschaft von G_{2304}, so ist:

$$\nu^{-1}\alpha\nu = \nu^{-1}\beta\sigma\nu = \nu^{-1}\beta\nu\sigma.$$

Ist nun $\nu^{-1}\alpha\nu$ von α verschieden, so ist auch $\nu^{-1}\beta\nu$ von β verschieden, und ist $\nu^{-1}\alpha\nu = \alpha$, so ist auch $\nu^{-1}\beta\nu = \beta$.

3) „Bilden die Collineationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, wo α_1 die Identität ist, eine Gruppe, und sind $\beta_1 = \sigma, \beta_2, \ldots \beta_r$ die zugehörigen Correlationen, so bilden auch

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$$

eine Gruppe.“

Denn aus

$$\beta_i = \alpha_i.\sigma, \quad \beta_l = \sigma.\alpha_l$$

folgt

$$\beta_i\beta_l = \alpha_i\sigma^2\alpha_l = \alpha_i.\alpha_l,$$

und $\beta_i\beta_l$ gehört demnach zur Gruppe der α.

Ferner ist
$$\beta_l . \alpha_i = \sigma \alpha_l . \alpha_i$$
und
$$\alpha_l . \beta_i = \alpha_l . \alpha_i . \sigma .$$
Ist also
$$\alpha_l . \alpha_i = \alpha_m ,$$
so finden wir
$$\beta_l . \alpha_i = \sigma . \alpha_m = \beta_m ,$$
$$\alpha_l . \beta_i = \alpha_m . \sigma = \beta_m ,$$
und die links stehenden Producte gehören zu den β.

4) „Aus σ und den involutorischen Collineationen der Gruppe G_{2304} resultiren lauter polare oder Nullcorrelationen.“

Ist nämlich α eine involutorische Collineation von G_{2304}, so ist
$$(\sigma \alpha)^2 = \sigma \alpha \sigma \alpha = \sigma \alpha \alpha \sigma = \sigma^2 = 1 .$$
Aus der Gruppe G_{16}, welche ausser der Identität die 6 elliptisch und die 9 doppeltgeraden hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_{576} enthält, und der Correlation σ resultirt nach den vorstehenden Sätzen 3, 4 eine Gruppe G_{32}, welche nur involutorische Verwandtschaften enthält, nämlich ausser den Collineationen von G_{16} sechs Null- und zehn polare Correlationen. (Klein's Gruppe.)

Für die Eintheilung der 1152 Correlationen von G_{2304} in Typen ist von Wichtigkeit der Satz 2.

(19.) Aus der polaren Correlation σ und den 12 elliptisch geschaarten Involutionen, die unter (I 1 α) in (17.) angegeben sind, resultiren 12 Nullcorrelationen;*) diese führen die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in sich selbst über. Das gleiche bewirken die 36 polaren Correlationen, welche aus σ und den 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen (I 1 β) in (17.) resultiren. Die Ordnungsflächen der 36 Polarsysteme sind alle reell und geradlinig und zwar gehen durch je 2 Gegenkanten der 3 Tetraeder Δ (oder Δ_1) vier von ihnen. Die polare Correlation σ selbst ist schon hinlänglich besprochen. Sie erzeugt mit den Collineationen von G_{576} 576 Correlationen, durch welche die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in einander übergehen. Aus σ und den 6 elliptisch geschaarten Involutionen (I α_3) von G_{576} resultiren 6 Nullcorrelationen, und aus σ und den 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen (I α_2) resultiren 9 polare Correlationen, deren Ordnungsflächen reell und geradlinig sind. σ erzeugt mit den 24 centrischen Involutionen von G_{576} 24 polare Correlationen, deren Ordnungsflächen ebenfalls reell, aber nicht geradlinig sind. Ausser den angegebenen polaren Correlationen giebt es nur noch 36, welche die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in einander transformiren; dieselben sind

*) Vgl. Reye, a. a. O. p. 102.

das Erzeugniss von σ mit den 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen ($II\,\beta_1$) von G_{576}. Ihre Polarflächen sind reell und geradlinig.

Eine harmonische Cf. (24_9, 18_4) wird nach vorstehendem durch 18 Null- und 106 polare Correlationen in sich selbst transformirt.

(20.) Die Gruppe G_{2304} ist in einer von Klein aufgestellten Gruppe G_{23040} enthalten, welche ausser den Collineationen und Correlationen von G_{2304} keine reellen Verwandtschaften besitzt, und zu der man folgendermassen gelangt: die in (19.) erwähnten 6 involutorischen Nullsysteme bestimmen 6 sog. „Fundamentalcomplexe"*), welche man analytisch so darstellen kann

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,$$

worin die x solche lineare Functionen der Liniencoordinaten sind, dass zwischen ihnen die Identität besteht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die Gruppe der 6 Complexe bleibt ungeändert, wenn man die Vorzeichen der Verhältnisse der x beliebig ändert und die x beliebig permutirt**). Die auf diese Weise definirten Operationen stellen $2^5 \,.\, 6! = 23040$ Verwandtschaften dar, die zur Hälfte Collineationen, zur Hälfte Correlationen sind, und welche die durch die 6 Fundamentalcomplexe bestimmten 10 Fundamentalflächen und 15 Fundamentaltetraeder***) in einander transformiren. Die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 gehören zu den Fundamentaltetraedern und die Polarfläche der Correlation $\sigma(2)$ gehört zu den Fundamentalflächen; G_{2304} ist diejenige Untergruppe von G_{23040}, deren Verwandtschaften die Polarfläche von σ ungeändert lassen. Dies Resultat lässt sich u. A. aus einer Untersuchung von Herrn Hess herleiten, der zeigt,†) dass zu jeder der 10 Fundamentalflächen eine Gruppe von 6 der 15 Fundamentaltetraeder gehört, welche zu einander und zu der betr. Fläche dieselbe projective Lage haben, wie die in 1) und 2) beschriebenen Tetraeder Δ und Δ_1 und die Ordnungsfläche von σ. Die so bestimmten 10 Gruppen von je 6 Tetraedern gehen durch 10 . 2304 Collineationen und Correlationen in einander über.

Strassburg im Juni 1895.

---

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. 2, p. 203.

**) F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, p. 356. — Reichardt, Math. Ann. Bd. 30. Nova Acta, Halle. Bd. L. — Maschke, Math. Ann. Bd. 30.

***) F. Klein, Math. Ann. Bd. 2, p. 205—208.

†) Hess, Nova Acta, Halle. Bd. LV, Nr. 2. Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen, p. 116—117.


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.22F31C C001
DIE CONFIGURATION (12[SUB 6], 16[SUB 3])
3 0112 017038891